1953 г. ТРУДЫ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА Том 2

ОБ УСЛОВИЯХ ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. М. Молчанов

(Доложено на заседании Общества 11.XII.1951 г.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В теории дифференциальных уравнений существуют два основных направления. Для первого (более раннего по времени) характерно преимущественное внимание к изучению свойств отдельных решений.

Типичными примерами задач, которые ставятся и решаются в этом направлении, являются задачи с начальными данными в теории параболических и гиперболических уравнений, краевые задачи и связанные с ними вопросы о характере приближения к краевым значениям в теории эллиптических уравнений.

С другой стороны, можно рассматривать дифференциальное выражение как оператор (быть может, нелинейный) в пространстве функций и изучать свойства этого оператора. Наиболее важные приложения такого подхода—метод неподвижной точки и спектральная теория дифференциальных операторов.

Развитие квантовой механики особенно подчеркнуло важность операторного подхода к линейным дифференциальным уравнениям. Было выяснено, что во многих случаях определение спектра линейного дифференциального уравнения является не менее важной задачей для физики, чем изучение отдельных решений. Поэтому возникает потребность научиться непосредственно исследовать спектр уравнения, обходя гораздо более трудную задачу его интегрирования.

В классической математической физике, где обычно предполагается конечность интервала и ограниченность коэффициентов уравнения, примером такого исследования является вывод асимптотических формул для собственных значений и собственных функций.

В 1909—1910 гг. Г. Вейль обобщил теорему разложения по собственным функциям на случай уравнения с особенностями в коэффициентах или заданного на бесконечном интервале.

В отличие от классического уравнения Штурма-Лиувилля, которое всегда имеет дискретный спектр, уравнение, заданное на всей прямой, может иметь и непрерывный, и полосатый спектр, и ещё более сложный характер спектра. Имеется простое достаточное условие дискретности спектра уравнения

$$-y''+py=\lambda y \qquad (-\infty<x<+\infty). \tag{I}$$

Это условие состоит в том, что $p(x)\to+\infty$, когда $x\to-\infty$ или $x\to+\infty$.

Обычное доказательство этой теоремы основано на теореме Штурма о нулях решения уравнения (I) и не поддается поэтому обобщению на уравнения в частных производных.

Спустя некоторое время после опубликования работ Г. Вейля, когда развитие квантовой механики вновь пробудило интерес к вопросу о спектре дифференциальных уравнений, в печати появилось большое количество статей, посвященных изучению характера спектра. В частности, по вопросу о дискретности спектра было опубликовано несколько работ.

Фридрихс [1] получил достаточное условие дискретности спектра для уравнения

$$-\frac{d}{dx}p\frac{dy}{dx}+qy=\lambda ry.$$

Однако это условие для уравнения (I) не дает ничего нового.

Реллих [2] нашел достаточное условие дискретности спектра для простейшего уравнения в частных производных

$$-\Delta\psi=\lambda\psi,$$

заданного в некоторой области с нулевыми граничными условиями.

Условие Реллиха относится к неограниченным областям весьма специального класса.

Важный успех был достигнут в работе Глазмана [3], который показал, что для уравнения

$$(-1)^n\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}+py=\lambda y$$

условие $p \to +\infty$ является достаточным условием дискретности спектра для любого $n \geqslant 1$.

Настоящая работа также посвящена выяснению условий, при которых дифференциальные операторы имеют дискретный спектр.

В результате исследования оказывается, что при весьма общих предположениях, а именно, требуя лишь ограниченность снизу коэффициента $p(x)$ в уравнении, для дифференциальных операторов второго порядка удается найти необходимые и достаточные условия дискретности спектра.

Изложим кратко содержание работы.

В § 1 формулируется необходимое и достаточное условие дискретности спектра оператора

$$Ly = -\frac{d^2y}{dx^2} + py.$$

Это условие состоит в том, что

$$\int\limits_{\mathscr{D}} p(x)\,dx \to +\infty,$$

когда отрезок $\mathscr{D}$, сохраняя длину, уходит в $+\infty$ или $-\infty$. Коэффициент $p(x)$ предполагается ограниченным снизу. Это же условие остается в силе и для уравнений, рассмотренных Глазманом:

$$(-1)^n \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + py = \lambda y.$$

Доказательство проводится только для случая $n=1$. В общем случае доказательство может быть проведено аналогично этому частному случаю. Возникающие осложнения носят чисто технический характер и легко преодолимы. Поэтому представляется нецелесообразным усложнять изложение рассмотрением общего случая, тем более, что основная идея критерия возникает из физической интерпретации уравнения (I), как уравнения Шредингера квантовой частицы и тогда даже отдельные этапы доказательства имеют ясный физический смысл.

Следующие параграфы (до § 7 включительно) посвящены уравнению в частных производных

$$-\Delta\psi + p\psi = \lambda\psi, \tag{II}$$

заданному во всем пространстве.

В § 2 доказана важная вспомогательная теорема, относящаяся к уравнению (II). Смысл этой теоремы легче всего понять, обратившись к квантовомеханической интерпретации уравнения (II), как уравнения движения частицы в потенциальном поле.

Тогда теорема § 2 означает, что наличие или отсутствие в пространстве непроницаемых для частицы перегородок не может изменить дискретного характера спектра [1]).

Это обстоятельство существенно облегчает исследование, так как введение непроницаемых перегородок разбивает систему на невзаимодействующие подсистемы. Спектр такой системы получается наложением спектров отдельных подсистем и будет дискретным тогда и только тогда,

---

[1]) Нужно только, чтобы размеры областей, выделяемых перегородками, не стремились к нулю. Так, например, допустима целочисленная решетка.

когда низшие энергетические уровни подсистем не накапливаются на конечном отрезке энергии.

В § 3 строится пример, выясняющий важное отличие одномерного случая от многомерного. В одномерном случае дискретность спектра эквивалентна тому, что средняя потенциальная энергия стремится к бесконечности. В многомерном случае этого оказывается недостаточно.

Смысл указанного обстоятельства состоит в том, что закрепление струны в одной точке разбивает ее на две независимые системы и приводит к сильному повышению ее основного тона. Что же касается двумерной мембраны, то закрепление ее в одной точке или даже в небольшом кружке не приводит к сильному повышению тона. Повышения тона можно добиться только закреплением мембраны по множеству, имеющему достаточно большую протяженность, например по отрезку.

Для уравнений это означает, что в n-мерном пространстве существуют множества, на которых можно как угодно сильно изменить коэффициент $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в уравнении (II) и однако это изменение приведет лишь к небольшому изменению низшего собственного значения.

Такие несущественные множества исследуются в § 4, и оказывается, что это множества небольшой емкости.

В §§ 5 и 6 доказывается необходимое и достаточное условие дискретности спектра, которое в § 7 формулируется в форме, удобной для применений, а именно:

Для того чтобы уравнение имело дискретный спектр, необходимо и достаточно, чтобы интеграл от функции $p(x_1, \ldots, x_n)$ по кубу $\mathscr{D}$ с несущественным вырезом[1]) F стремился к бесконечности

$$\int\limits_{\mathscr{D}-F} p(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \to +\infty,$$

когда куб $\mathscr{D}$, сохраняя размер, уходит в бесконечность, а F изменяется произвольно, оставаясь несущественным вырезом куба $\mathscr{D}$.

Таким образом, если спектр недискретен, то найдется счетная последовательность одинаковых непересекающихся кубов $\mathscr{D}_n$, для которых

$$\int\limits_{\mathscr{D}_n-F_n} p\, dv \leqslant c,$$

где F_n — несущественный вырез куба $\mathscr{D}_n$.

Это условие необходимо и достаточно для недискретности спектра.

Совершенно аналогичным образом в § 8 разбирается вопрос о спектре неограниченной мембраны.

Выясняется, что спектр мембраны тогда и только тогда будет дискретным, когда мембрана содержит счетное число одинаковых непересекающихся кубов. Следует только иметь в виду, что в общем случае из каждого куба нужно выбросить множество малой емкости.

Если граница мембраны достаточно гладкая, т. е. имеет ограниченную кривизну, то последняя оговорка излишня.

В § 9 рассмотрен разностный аналог дифференциальных уравнений в частных производных. Ответ оказывается более простым, чем для дифференциальных уравнений, а именно: для того чтобы спектр уравнения

---

[1]) См. определение 7.1, стр. 187.

был дискретным, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент

$$p_{i_1, \ldots, i_n} \to +\infty,$$

когда

$$|i_1| + |i_2| + \ldots + |i_n| \to \infty.$$

Автор пользуется случаем принести глубокую благодарность своему руководителю проф. И. М. Гельфанду.

§ 1. Критерий дискретности спектра полуограниченного оператора Штурма-Лиувилля

В настоящем параграфе будут выяснены условия, при которых дифференциальный оператор второго порядка L

$$L\psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2} + p(x)\psi, \tag{1.1}$$

заданный на всей прямой, имеет дискретный спектр.

Исследования основаны на следующем общем критерии дискретности спектра.

Дискретность спектра положительно определенного[1]) оператора A

$$(A\psi, \psi) \geqslant (\psi, \psi)$$

эквивалентна компактности множества векторов ψ, для которых

$$(A\psi, \psi) \leqslant 1.$$

Этот критерий нетрудно доказать. Близкий, но все же несколько отличающийся критерий опубликован впервые Реллихом [4]. Для дальнейшего удобнее критерий, сформулированный выше.

В применении к оператору L этот критерий означает, что если

$$p \geqslant 1, \tag{1.2}$$

то дискретность спектра оператора L эквивалентна компактности семейства $\mathscr{L}$ кусочно-гладких функций ψ, для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + p\psi^2 \right] dx \leqslant 1. \tag{1.3}$$

Для семейства функций, определяемого неравенством (1.3), можно доказать следующую теорему.

Теорема 1.1 *Для того чтобы семейство $\mathscr{L}$, задаваемое неравенством* (1.3), *с $p \geqslant 1$ было некомпактно, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{\mathscr{D}_n\}$ непересекающихся отрезков одинаковой длины D, для которых*

$$\int_{\mathscr{D}_n} p(x)\, dx < C. \tag{1.4}$$

---

[1]) Оператор A предполагается самосопряженным. Для дифференциальных операторов вида

$$L\psi = -\Delta\psi + p\psi,$$

заданных во всем пространстве, самосопряженность (при условии $p \geqslant c$) доказана Карлеманом, см. [5].

Доказательство. Пусть (1.4) выполнено. Покажем, что $\mathscr{L}$ некомпактно. Построим последовательность функций:

$$y_n(x) = \sin\frac{\pi}{D}(x - a_n) \quad \text{при} \quad x \in \mathscr{D}_n$$

и

$$y_n(x) = 0 \qquad\qquad \text{при} \quad x \notin \mathscr{D}_n,$$

где a_n — левый конец отрезка $\mathscr{D}_n$, а D — его длина, по предположению, не зависящая от n.

Эти функции имеют одинаковый интеграл квадрата функции и одинаковый интеграл квадрата производной, так как они получаются одна из другой сдвигом вдоль оси x. Кроме того, они попарно ортогональны, так как отрезки $\mathscr{D}_n$ не пересекаются. Из условия (1.4) ясно, что можно подобрать общий для всех y_n множитель так, чтобы получить последовательность функций, удовлетворяющих условию (1.3). Так как эта последовательность некомпактна, то все $\mathscr{L}$ тем более некомпактно.

Пусть, наоборот, $\mathscr{L}$ некомпактно. Докажем, что существует последовательность $\{\mathscr{D}_n\}$, удовлетворяющая условию (1.4).

По теореме (0.2) дополнения существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любого N найдется функция $y(x)$ семейства $\mathscr{L}$, для которой

$$\int\limits_{|x|>N} y^2\,dx > \varepsilon. \tag{1.5}$$

ε, конечно, меньше 1, так как $y \in \mathscr{L}$ и, значит, в силу (1.2) даже

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2\,dx = 1.$$

Разобьем полупрямые $(-\infty, -N)$ и $(N, +\infty)$ на отрезки $\mathscr{D}$ длины D. Тогда, по крайней мере, для одного из этих отрезков будет выполнено неравенство

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + py^2\right] dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\mathscr{D}} y^2\,dx. \tag{1.6}$$

Действительно, если бы для всех отрезков выполнялось противоположное неравенство, то, сложив эти неравенства и учитывая, что $y \in \mathscr{L}$, мы получили бы

$$1 > \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{|x|>N} y^2\,dx,$$

что противоречит (1.5).

Следовательно, для любого D найдется отрезок $\mathscr{D}$ длины D, расположенный вне интервала $(-N, +N)$, для которого выполнено неравенство (1.6). Рассмотрим функцию $y(x)$ на $\mathscr{D}$ и нормируем ее условием

$$\int\limits_{\mathscr{D}} y^2\,dx = D. \tag{1.7}$$

Тогда в силу (1.6) получим:

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + py^2\right] dx \leqslant \frac{D}{\varepsilon}. \tag{1.8}$$

Равенство (1.7) показывает, что среднее значение квадрата $y(x)$ равно единице. Оценим величину минимального значения $y^2(x)$ на отрезке $\mathscr{D}$. В тождестве

$$y(x) - y(\xi) = \int\limits_{\xi}^{x} y'(t)\, dt$$

применим к правой части неравенство Буняковского и используем (1.8). Получим

$$|y(x) - y(\xi)| \leqslant \frac{D}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{1.9}$$

Так как полупрямые $(-\infty, -N)$ и $(N, +\infty)$ мы могли разбить на отрезки любой длины, D можно считать любым числом. Положим, в частности, $D = \frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon}$. Тогда из (1.9) следует, что

$$|y(x)| \geqslant \frac{3}{4}$$

всюду на $\mathscr{D}$, а из равенства (1.8) получится, что

$$\int\limits_{\mathscr{D}} p(x)\, dx < 1.$$

Так как N — произвольное число, а длина $\mathscr{D}$ зависит только от ε, то можно найти счетную последовательность непересекающихся $\mathscr{D}$ с этим свойством.

Следовательно, теорема доказана в обе стороны. В ходе доказательства из того факта, что среднее значение квадрата функции равно 1, а интеграл квадрата производной достаточно мал, было выведено, что функция по модулю остается не слишком малой на целом отрезке. Это важное свойство функций одного переменного перестает быть справедливым для функций многих переменных, что ведет к значительным усложнениям условий дискретности спектра.

В одномерном случае из теоремы 1.1 критерий дискретности спектра получается для тех операторов L, для которых $p \geqslant 1$. Но если заметить, что дискретность спектра оператора L и условие (1.4) теоремы 1.1 не зависят от уменьшения или увеличения $p(x)$ на любую постоянную, то критерий дискретности получится для любого L, у которого коэффициент $p(x)$ ограничен снизу.

Сформулируем этот критерий.

Теорема 1.2. *Если $p(x) \geqslant p_0$, то необходимым и достаточным условием дискретности спектра оператора является условие, чтобы для отрезка $\mathscr{D}$ любой длины*

$$\int\limits_{\mathscr{D}} p(x)\, dx \to \infty,$$

когда отрезок $\mathscr{D}$, сохраняя длину, уходит в $+\infty$ или $-\infty$.

Если интерпретировать оператор L как оператор Гамильтона некоторой квантовомеханической системы, то критерий дискретности допускает простое физическое истолкование. Он означает, что частица будет совершать финитное движение тогда и только тогда, когда средняя потенциальная энергия неограниченно возрастает с увеличением $|x|$.

§ 2. Принцип локализации

Для дифференциальных операторов второго порядка с частными производными не получается критерия дискретности спектра в той простой форме, в какой он доказан в одномерном случае.

Поэтому возникает задача отыскания правильной формы критерия дискретности. В настоящем параграфе будет доказана теорема, позволяющая свести задачу к оценке наименьшего собственного значения оператора, заданного на кубе. Формулировка этой теоремы, имеющей самостоятельный интерес, подсказывается квантовомеханической интерпретацией оператора L.

Изложение ради наглядности ведется для двумерного случая. Обобщение на n-мерный случай не представляет никакого затруднения.

Как и в одномерном случае, мы исходим из общего критерия дискретности спектра, который для плоскости формулируется так:

если $p(x, y) \geqslant 1$, то дискретность спектра оператора L

$$L\psi = -\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + p\psi \tag{2.1}$$

эквивалентна компактности (в смысле сходимости в среднем) семейства $\mathscr{L}$ кусочно-гладких функций ψ, определяемого неравенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + p\psi^2\right] dx\, dy \leqslant 1. \tag{2.2}$$

Для того чтобы иметь возможность сформулировать теорему, необходимо дать два определения. Рассмотрим на плоскости квадрат $\mathscr{D}$ со стороной D и свяжем с ним два числа $\lambda(\mathscr{D})$ и $\mu(\mathscr{D})$ следующим образом:

$$\mu(\mathscr{D}) = \inf \int_{\mathscr{D}} [(\operatorname{grad}\psi)^2 + p\psi^2]\, dv, \tag{2.3}$$

причем inf берется по всем функциям ψ, для которых

$$\int_{\mathscr{D}} \psi^2\, dv = 1. \tag{2.4}$$

$\lambda(\mathscr{D})$ определяется аналогичным образом

$$\lambda(\mathscr{D}) = \inf \int_{\mathscr{D}} [(\operatorname{grad}\psi)^2 + p\psi^2]\, dv, \tag{2.5}$$

но здесь inf берется по тем функциям ψ, удовлетворяющим равенству (2.4), которые, кроме того, равны нулю на границе квадрата.

Сформулируем теперь основную теорему настоящего параграфа.

Теорема 2.1. *Для того чтобы спектр оператора L не был дискретным, необходимо и достаточно, чтобы существовала счетная последо-*

вательность $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \ldots, \mathscr{D}_n, \ldots$ *непересекающихся квадратов одинаковых размеров, для которых*

$$\lambda(\mathscr{D}_n) < C. \tag{2.6}$$

З а м е ч а н и е. *Теорема останется справедливой, если в ее формулировке заменить* $\lambda(\mathscr{D})$ *на* $\mu(\mathscr{D})$, *что будет видно из хода доказательства.*

Прежде чем доказывать теорему, приведем ее квантовомеханическое истолкование. Допустим, что квадрат $\mathscr{D}$ окружен стенками, через которые частица не может пройти. Тогда ее состояние описывается функцией, равной нулю на границах $\mathscr{D}$. Поэтому $\lambda(\mathscr{D})$ означает просто низший уровень энергии, которую может иметь частица, заключенная в квадрат $\mathscr{D}$.

Пусть теперь мы имеем последовательность квадратов $\{\mathscr{D}_n\}$, окруженных непроницаемыми стенками (это соответствует граничным условиям $\psi = 0$ на границе $\mathscr{D}_n$). Так как частицы не могут выйти из $\mathscr{D}_n$, то спектр такой системы получается простым наложением спектров отдельных частиц. В этом случае ясно, что для дискретности спектра необходимо и достаточно, чтобы низшие уровни энергии отдельных частиц не накапливались.

Теорема 2.1 утверждает, что внесение непроницаемых стенок не изменяет дискретности спектра. Еще более важным и интересным является обратное утверждение: если система с перегородками имеет дискретный спектр, то он останется дискретным и после снятия перегородок.

Перейдем к д о к а з а т е л ь с т в у теоремы.

Если (2.6) выполнено, то по определению $\lambda(\mathscr{D}_n)$ найдется функция ψ_n, исчезающая вне $\mathscr{D}_n$ и такая, что

$$\int\limits_{\mathscr{D}_n} \psi_n^2\, dv = 1,$$

а

$$\int\limits_{\mathscr{D}_n} [(\operatorname{grad} \psi_n)^2 + p\psi_n^2]\, dv < C.$$

Так как $\mathscr{D}_n$ не пересекаются, то ψ_n попарно ортогональны. Поэтому $\psi_n / \sqrt{C}$ образуют некомпактную последовательность, принадлежащую $\mathscr{L}$. Следовательно, по общему критерию, спектр недискретен.

Пусть, наоборот, спектр недискретен. Тогда $\mathscr{L}$ некомпактно, и в силу теоремы 0.2 дополнения существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого N найдется функция ψ, принадлежащая $\mathscr{L}$ и удовлетворяющая неравенству

$$\int\limits_{|x|+|y|\geqslant N} \psi^2\, dv < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Покроем область $|x|+|y| \geqslant N$ непересекающимися квадратами со стороной D и занумеруем эти квадраты произвольным образом. Так как функция ψ принадлежит $\mathscr{L}$, то для нее выполнено неравенство (2.2). Это неравенство только усилится, если интеграл брать не по всей плоскости, а лишь по сумме квадратов $\mathscr{D}_n$.

Поэтому

$$\sum_n \int\limits_{\mathscr{D}_n} [(\operatorname{grad} \psi)^2 + p\psi^2]\, dv \leqslant 1.$$

Но из определения $\mu(\mathscr{D})$ следует, что

$$\int\limits_{\mathscr{D}} [(\operatorname{grad}\psi)^2 + p\psi^2]\,dv \geqslant \mu(\mathscr{D}) \int\limits_{\mathscr{D}} \psi^2\,dv$$

для любой функции ψ.

Поэтому

$$\left(\sum_n \int\limits_{\mathscr{D}_n} \psi^2\,dv\right) \cdot \inf_n \mu(\mathscr{D}_n) \leqslant \sum_n \int\limits_{\mathscr{D}_n} [(\operatorname{grad}\psi)^2 + p\psi^2]\,dv \leqslant 1.$$

Но так как

$$\sum_n \int\limits_{\mathscr{D}_n} \psi^2\,dv \geqslant \int\limits_{|x|+|y|>N} \psi^2\,dv > \varepsilon,$$

то окончательно получаем

$$\inf \mu(\mathscr{D}_n) < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Последнее неравенство означает, что существует квадрат, для которого

$$\mu(\mathscr{D}) < \frac{1}{\varepsilon}. \tag{2.8}$$

Но N можно выбрать сколь угодно большим; следовательно, можно найти счетную последовательность квадратов любого наперед заданного размера, которые попарно не пересекаются и для каждого из которых выполнено неравенство (2.8).

Применяя неравенство (0.9) дополнения получаем, что для этой последовательности

$$\lambda(\mathscr{D}_n) < 2^{11}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{D^2}\right].$$

Это последнее неравенство, где D означает сторону квадратов последовательности $\mathscr{D}_n$, завершает доказательство теоремы.

Свойство, выраженное этой теоремой, естественно назвать *принципом локализации*, так как это свойство означает, что о дискретности спектра можно судить по поведению локальных характеристик.

Ясно, что такая возможность исследовать уравнение на отдельных кубах, не заботясь о том, что делается вне их, существенно упрощает исследование.

§ 3. Пример оператора L с недискретным спектром

Как уже указывалось выше, для уравнения в частных производных дискретность спектра не следует из условия

$$\int\limits_{\mathscr{D}} p\,dv \to +\infty, \tag{3.1}$$

являющегося простейшим обобщением условия в одномерном случае.

Нашей ближайшей задачей будет построение примера, показывающего причину недостаточности условия (3.1). Из этого примера станет ясно, как следует изменить условие (3.1), чтобы оно стало необходимым и достаточным.

Перед построением примера укажем его основную идею.

Рассмотрим в R_n функцию ψ, определяемую равенством

$$\psi = \frac{b^{n-2}}{r^{n-2}} \cdot \frac{r^{n-2} - a^{n-2}}{b^{n-2} - a^{n-2}}, \qquad a \leqslant r \leqslant b, \tag{3.2}$$

где

$$r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Функция ψ есть гармоническая в шаровом слое $a \leqslant r \leqslant b$ функция, изменяющаяся в нем от 0 до 1.

Интеграл квадрата градиента этой функции легко вычислить. Он равен

$$\int (\operatorname{grad} \psi)^2 \, dv = (n-2)\, \omega_n \frac{a^{n-2}}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2}}, \tag{3.3}$$

где ω_n означает поверхность единичной сферы n-мерного пространства.

Этот интеграл может быть сделан как угодно малым выбором достаточно малого a.

Следовательно, в пространстве, в отличие от прямой, возможны функции, которые возрастают от 0 до 1 и интеграл Дирихле которых сколь угодно мал.

Подобные функции существуют и на плоскости, в чем легко убедиться рассматривая функцию

$$\psi = \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{r}{a}.$$

Аналогичным образом можно построить функции, которые сколь угодно часто обращаются в нуль. Возьмем для этого куб $\mathscr{D}$ и разместим внутри его большое число попарно непересекающихся шаров. Радиусы этих шаров обозначим через b_i. Поместим внутри каждого такого шара концентрический шар радиуса a_i. В полученном шаровом слое построим функцию типа (3.2). Доопределим нашу функцию на всем $\mathscr{D}$, положив ее равной нулю внутри шаров a_i и равной единице во всех точках, не принадлежащих ни одному из шаров b_i.

Шары b_i выберем такими, чтобы сумма их объемов была не больше половины объема куба $\mathscr{D}$. Тогда, если обозначить построенную функцию через φ

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \varphi^2 \, dv \geqslant \frac{1}{2} D^n, \tag{3.4}$$

где D означает длину ребра $\mathscr{D}$. Действительно, шары b_i занимают по условию не больше половины объема $\mathscr{D}$, а вне их функция φ равна единице.

Интеграл Дирихле функции φ равен сумме интегралов по шарам b_i. Но для каждого шара интеграл Дирихле вычисляется по формуле (3.3). Поэтому

$$\int\limits_{\mathscr{D}} (\operatorname{grad} \varphi)^2 \, dv = (n-2)\, \omega_n \sum_i \frac{a_i^{n-2}}{1 - \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^{n-2}}. \tag{3.5}$$

При заданных b_i, выбирая достаточно малые a_i, можно эту сумму сделать сколь угодно малой. В частности, можно считать, что

$$\int\limits_{\mathscr{D}} (\operatorname{grad} \varphi)^2 \, dv < 1. \tag{3.6}$$

Существование подобных функций коренным образом отличает многомерные пространства от одномерного.

Теперь становится ясным, как следует строить пример уравнения с недискретным спектром, для которого условие (3.1) выполнено.

Возьмем для этого счетную последовательность одинаковых кубов $\mathcal{D}_k$. В кубе с номером k построим систему шаров b_i таким образом, чтобы любой куб со стороной $\frac{1}{k}$, помещенный где угодно внутри $\mathcal{D}_k$, содержал хотя бы один из шаров b_i. Ясно, что этого можно добиться, если расположить центры шаров b_i по решетке с длиной периода меньше, чем $\frac{1}{4k}$. После этого выберем радиусы шаров столь малыми, чтобы они не пересекались и их суммарный объем был не больше половины объема $\mathcal{D}_k$. Помещая, наконец, внутри b_i шары a_i, сделаем их столь малыми, чтобы сумма в правой части равенства (3.5) была меньше 1.

Разобьем теперь R_n на одинаковые кубы и занумеруем их произвольным образом. В $\mathcal{D}_k$ проведем построение системы шаров b_i так, как это указано выше.

Определим функцию $p(x_1, \ldots, x_n)$. Вне шаров b_i положим $p=0$. Внутри шара a_i положим p постоянной, равной обратной величине объема шара a_i, так, чтобы

$$\int_{a_i} p\, dv = 1.$$

Ясно, что для функции $p(x_1, \ldots, x_n)$ условие (3.1) выполнено, так как если куб $\mathcal{D}$, сохраняя размер, будет уходить в бесконечность, то он будет попадать на $\mathcal{D}_k$ со все более высокими номерами k. Шары a_i расположены на $\mathcal{D}_k$ с плотностью, равной один шар на куб с ребром длины $1/k$. Следовательно, в куб $\mathcal{D}$ по мере его удаления будет попадать как угодно много шаров a_i. Но интеграл от p по каждому из этих шаров равен единице и так как их наберется как угодно много, то

$$\int_{\mathcal{D}} p\, dv$$

как угодно велик, т. е. (3.1) выполнено.

Однако спектр уравнения с этой потенциальной энергией недискретен. Действительно, построив на $\mathcal{D}_k$ связанную с ним функцию φ_k, мы получим в силу (3.4) и (3.6), что

$$\mu(\mathcal{D}_k) \leqslant \frac{2}{D^n}$$

(n — размерность пространства).

Поэтому в силу замечания к теореме 2.1 спектр уравнения с построенным выше p не будет дискретным.

Отметим важное обстоятельство.

Так как функция φ внутри шаров a_i равна нулю, то мы могли считать коэффициент p внутри шаров a_i как угодно большим, и спектр остался бы недискретным. Следовательно, в пространстве R_n $(n \geqslant 2)$ существуют множества, произвольное изменение функций p на которых не влияет на дискретность или недискретность спектра. В то же время эти множества могут быть такими, что изменение p на них сильно сказывается на среднем значении $p(x_1, \ldots, x_n)$ по кубу. Следовательно, условие (3.1) нужно изменить таким образом, чтобы оно не зависело от поведения $p(x_1, \ldots, x_n)$ на этих несущественных множествах.

§ 4. Несущественные множества

Нашей ближайшей задачей является выяснение структуры множеств, поведение потенциала $p(x_1, \ldots, x_n)$ на которых не влияет на факт дискретности или недискретности спектра. Пример, рассмотренный в § 3, подсказывает важную особенность этих множеств. Она состоит в существовании функций, вырастающих от нуля на множестве, до единицы—на границе объемлющего куба, интеграл Дирихле которых невелик. Это обстоятельство наводит на мысль считать величину интеграла Дирихле подобных функций мерой несущественности множества.

Дадим точное определение.

Определение 4.1. Пусть F—ограниченное замкнутое множество[1]). Рассмотрим кусочно-гладкие функции ψ, каждая из которых равна единице на F и нулю — вне некоторого шара, содержащего F.

Мерой несущественности множества F называется нижняя грань интегралов Дирихле таких функций,

$$N(F) = \inf_{\{\psi\}} \int (\operatorname{grad} \psi)^2 \, dv. \tag{4.1}$$

Целью настоящего параграфа является доказательство решающего для дальнейшего обстоятельства:

Несущественные множества — это множества малой емкости.

Точнее, будет показано, что определенная выше мера несущественности лишь постоянным множителем отличается от емкости множества.

Будем исходить из определения емкости в форме, данной, например, в статье М. В. Келдыша [6].

Пусть F — замкнутое ограниченное множество, а m — вполне аддитивная положительная мера, задающая распределение зарядов на F. Рассмотрим потенциал распределения

$$U(P) = \int_F \frac{dm(Q)}{(PQ)^{n-2}}. \tag{4.2}$$

Максимальный полный заряд распределения, для которого

$$U(P) \leqslant 1, \tag{4.3}$$

называется емкостью F

$$C(F) = \sup_{U \leqslant 1} \int_F dm. \tag{4.4}$$

Винером (см., например, [8], стр. 270) была доказана важная теорема, которая для замкнутых множеств F, состоящих из конечного числа шаров, может быть сформулирована следующим образом.

Существует единственная мера, сосредоточенная на F, для которой

$$\int_F dm = C(F). \tag{4.5}$$

Потенциал $U(P)$, соответствующий μ, равен единице всюду на F, непрерывен во всем R_n и стремится к нулю, когда $P \to \infty$.

При помощи этой теоремы Винера мы докажем, что $C(F)$ и $N(F)$ отличаются только постоянным множителем.

---

[1]) В дальнейшем рассматриваются только такие F, которые состоят из конечного числа шаров.

Прежде всего из теоремы 0.6 дополнения следует, что при $n > 2$

$$C(F) = \frac{1}{(n-2)\,\omega_n} \int (\operatorname{grad} U)^2\, dv, \tag{4.6}$$

где ω_n — поверхность единичной сферы n-мерного пространства.

Следовательно, если мы докажем, что интеграл Дирихле функции U реализует минимум интеграла Дирихле среди функций, равных 1 на F, и нулю вне шара, содержащего F, то формула (4.6) дает нам связь между $C(F)$ и $N(F)$.

Итак, покажем, что

$$N(F) = \int (\operatorname{grad} U)^2\, dv. \tag{4.7}$$

Прежде всего ясно, что среди функций, равных 1 на F и нулю вне заданной сферы Σ_R, минимум интеграла Дирихле достигается на гармонической функции U_R, которая равна 0 на Σ_R и 1 на F. С увеличением R эти функции монотонно возрастают, оставаясь, однако, все время меньше U. Их интегралы Дирихле монотонно убывают.

Из теорем о гармонических функциях (см., например, [8], стр. 232—234) следует, что интегралы Дирихле функций U_R сходятся к интегралу Дирихле функции U в каждом конечном шаре, а, значит, и к интегралу Дирихле U во всем пространстве.

Следовательно, (4.7) доказано. Сравнивая (4.6) и (4.7), получаем

$$N(F) = (n-2)\,\omega_n C(F). \tag{4.8}$$

Аналогичные рассмотрения для плоскости приводят к равенству

$$N(F) = 2\pi C(F). \tag{4.9}$$

§ 5. Необходимое условие дискретности спектра

В § 2 было установлено, что условием дискретности спектра L является выполнение требования

$$\mu(\mathscr{D}) \to \infty.$$

Если мы сможем дать теперь оценку для $\mu(\mathscr{D})$, выраженную через функцию $p(x_1, \ldots, x_n)$, то задача установления критерия дискретности спектра будет решена.

Мы видели выше, что не везде поведение p имеет значение для характера спектра. Значит, и для величины $\mu(\mathscr{D})$ не важны значения p на несущественных множествах. Более точно это положение вещей описывается теоремой, которую мы докажем ниже.

Рассмотрим куб $\mathscr{D}$ и в нем множество F, имеющее небольшую емкость по сравнению с емкостью всего $\mathscr{D}$. А именно, будем считать, что

$$C(F) < \frac{1}{4}\,\frac{D^{n-2}}{[2^{n-2} + (n-2)\,\omega_n]\,(n-2)\,2^{n-2}\,\omega_n}, \tag{5.1}$$

где D — длина ребра куба $\mathscr{D}$.

Обозначим через $\tilde{p}$ интеграл от $p(x_1, \ldots, x_n)$ по множеству $\mathscr{D} - F$

$$\tilde{p} = \int\limits_{\mathscr{D}-F} p(x_1, \ldots, x_n)\, dv. \tag{5.2}$$

Утверждается, что если емкость множества F удовлетворяет неравенству (5.1), то произвольное изменение p на F не может сильно увеличить $\mu(\mathscr{D})$. Имеет место следующее неравенство:

$$\mu(\mathscr{D}) \leqslant 4^n \frac{\tilde{p} + (n-2)\,\omega_n C(F)}{D^n}. \tag{5.3}$$

Для доказательства вспомним, что из определения $\mu(\mathscr{D})$ следует неравенство

$$\mu(\mathscr{D}) \leqslant \frac{\int\limits_{\mathscr{D}} [(\operatorname{grad}\psi)^2 + p\psi^2]\,dv}{\int\limits_{\mathscr{D}} \psi^2\,dv}, \tag{5.4}$$

где ψ — произвольная функция, определенная на $\mathscr{D}$.

Рассмотрим теперь меру m, сосредоточенную на F, для которой

$$C(F) = \int\limits_F dm$$

и связанный с ней потенциал $U(P)$.

Докажем неравенство (5.3), подставляя $\psi = 1 - U$ в (5.4).

Числитель в (5.4) оценивается легко, если вспомнить, что

$$\int (\operatorname{grad} U)^2\,dv = C(F)\,(n-2)\,\omega_n.$$

Так как с другой стороны $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ всюду, и $\psi = 0$ на F, то

$$\int\limits_{\mathscr{D}} p\psi^2\,dv \leqslant \int\limits_{\mathscr{D}-F} p\,dv = \tilde{p}.$$

Поэтому для числителя получаем неравенство

$$\int\limits_{\mathscr{D}} [(\operatorname{grad}\psi)^2 + p\psi^2]\,dv \leqslant \tilde{p} + (n-2)\,\omega_n C(F). \tag{5.5}$$

Значительно труднее оценить знаменатель в (5.4). Для удобства дальнейших выкладок будем считать, что начало координат находится в центре куба $\mathscr{D}$ и рассмотрим куб $\mathscr{D}_2$ с длиной ребра $2D$ и центром в начале координат. Обозначим через $\chi(P)$ вспомогательную функцию

$$\chi(P) = \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{2n},$$

для которой

$$\Delta\chi = 1.$$

Применяя формулу Остроградского-Грина, получаем

$$\int\limits_{G_2} \psi\,dv = \int\limits_{G_2} (\psi\Delta\chi - \chi\Delta\psi)\,dv = \int\limits_{\Gamma} \left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial n} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) d\sigma - \int\limits_{\gamma} \left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial n} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Здесь через Γ обозначена граница $\mathscr{D}_2$, через G_2 — пересечение $\mathscr{D}_2$ с той связной компонентой G дополнения к F, которая содержит бесконечно удаленную точку, и, наконец, через γ — граница G.

Так как γ есть часть границы F, то $\psi|_\gamma=0$, а $\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_\gamma \geqslant 0$. Поэтому для интеграла от ψ до $\mathscr{D}_2$ получаем оценку:

$$\int\limits_{\mathscr{D}_2} \psi\, dv \geqslant \int\limits_{\Gamma} \left(\psi \frac{\partial\chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial\psi}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Оценивая вспомогательную функцию χ, получаем более сильное неравенство

$$\int\limits_{\mathscr{D}_2} \psi\, dv \geqslant \frac{D}{n} \int\limits_{\Gamma} \psi\, d\sigma - \frac{D^2}{2} \left| \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma \right|. \tag{5.6}$$

Для дальнейших оценок необходимо вспомнить, что́ такое ψ:

$$\psi(P) = 1 - \int\limits_{F} \frac{dm(Q)}{(PQ)^{n-2}}.$$

Поэтому на границе куба $\mathscr{D}_2$, которая всюду удалена от F не меньше, чем на $\frac{D}{2}$,

$$\psi(P) \geqslant 1 - \left(\frac{2}{D}\right)^{n-2} \int\limits_{F} dm = 1 - \left(\frac{2}{D}\right)^{n-2} C(F).$$

Для оценки вычитаемого в (5.6) воспользуемся равенством (0.23) дополнения. Оно дает

$$\left| \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma \right| = (n-2)\, \omega_n C(F).$$

Подставляя полученные оценки в (5.6), имеем

$$\int\limits_{\mathscr{D}_2} \psi\, dv \geqslant 2D^n - D^2 C(F)\left[2^{n-2} + (n-2)\,\omega_n\right].$$

Но так как $C(F)$ удовлетворяет неравенству (5.1), то

$$\int\limits_{\mathscr{D}_2} \psi\, dv \geqslant \frac{3}{2} D^n. \tag{5.7}$$

Для оценки интеграла от ψ^2 по $\mathscr{D}$ воспользуемся теоремой 0.4 дополнения.

В нашем случае основное неравенство, доказанное в этой теореме, дает

$$2^{\frac{n}{2}} \sqrt{\int\limits_{\mathscr{D}} \psi^2\, dv} \geqslant \sqrt{\int\limits_{\mathscr{D}_2} \psi^2\, dv} - 2^{\frac{n-2}{2}} D \sqrt{\int\limits_{\mathscr{D}} (\operatorname{grad}\psi)^2\, dv}. \tag{5.8}$$

Неравенство Буняковского позволяет из (5.7) получить оценку

$$\sqrt{\int\limits_{\mathscr{D}_2} \psi^2\, dv} \geqslant D^{-\frac{n}{2}} \left| \int\limits_{\mathscr{D}_2} \psi\, dv \right| \geqslant \frac{3}{2} D^{\frac{n}{2}}.$$

Если теперь объединить это неравенство, неравенство (5.8), равенство (0.26) дополнения, выражающее интеграл Дирихле ψ через $C(F)$ и неравенство (5.1) для $C(F)$, то получается неравенство для знаменателя дроби (5.4)

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \psi^2\,dv \geqslant \left(\frac{D}{2}\right)^n.$$

Вместе с (5.5) это окончательно дает

$$\mu(\mathscr{D}) \leqslant \frac{\tilde{p}+(n-2)\,\omega_n C(F)}{\left(\frac{D}{4}\right)^n},$$

где предполагается, что $C(F)$ удовлетворяет неравенству (5.1).

Таким образом, неравенство (5.3) доказано. Из этого неравенства в силу теоремы 1.2 следует необходимое условие дискретности спектра.

Если спектр оператора L дискретен, то среднее значение потенциальной энергии на кубе $\mathscr{D}$ с любым несущественным вырезом F стремится к $+\infty$, когда куб уходит в бесконечность.

Под несущественным вырезом здесь понимается множество, емкость которого удовлетворяет неравенству (5.1).

§ 6. Достаточное условие дискретности спектра

Перейдем к доказательству достаточного признака дискретности спектра. Но технически удобнее установить эквивалентный ему необходимый признак недискретности спектра.

Предположим поэтому, что оператор L имеет недискретный спектр. Тогда по теореме § 2 найдется счетное число попарно непересекающихся кубов $\mathscr{D}_n$ любого заданного размера, для которых

$$\mu(\mathscr{D}_n) < C. \tag{6.1}$$

Мы покажем, что *если взять последовательность кубов достаточно малого размера (этот размер определяется только постоянной C), то в каждом из них можно так выделить множество F с емкостью, удовлетворяющей неравенству* (5.1), *что интегралы от p по множествам $\mathscr{D}_n - F_n$ будут меньше единицы.*

Тем самым будет доказано, что сформулированное в конце § 5 необходимое условие дискретности спектра является также достаточным.

Приступая к доказательству, заметим, что по определению $\mu(\mathscr{D})$ неравенство (6.1) означает существование на каждом кубе $\mathscr{D}$ функции ψ, удовлетворяющей неравенству

$$\int\limits_{\mathscr{D}} [|\nabla\psi|^2 + p\psi^2]\,dv \leqslant C \int\limits_{\mathscr{D}} \psi^2\,dv.$$

Нормируя функцию ψ условием

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \psi^2\,dv = D^n, \tag{6.2}$$

перепишем это неравенство в виде

$$\int\limits_{\mathscr{D}} [(\operatorname{grad}\psi)^2 + p\psi^2]\,dv \leqslant CD^n. \tag{6.3}$$

Следовательно, условие (6.1) означает, что на каждом кубе существует функция, среднее значение квадрата которой равно 1 и для которой выполнено неравенство (6.3). Если бы можно было в каждом кубе $\mathscr{D}_n$

выделить меньший куб Δ_n (*постоянного для всех n размера*), на котором выполнялось бы $|\psi|>\frac{1}{2}$, то из неравенства (6.3) мы получили бы оценку для интеграла p по кубу Δ_n, и теорема была бы доказана. Но так как существуют как угодно плотные несущественные множества, то такой последовательности кубов Δ_n, вообще говоря, выделить нельзя.

Поступим поэтому так. Обозначим через E множество точек $\mathscr{D}$, где $|\psi|\leqslant\frac{1}{4}$. Так как ψ непрерывна на $\mathscr{D}$, то существует число $r>0$ такое, что колебание ψ в любой сфере радиуса r меньше $^1/_4$. Покроем замкнутое множество E шарами радиуса r и выберем конечное покрытие. Объединение шаров этого покрытия обозначим через F. Всюду на $\mathscr{D}-F$ функция ψ по модулю больше $^1/_4$, а всюду на F $|\psi|<\frac{1}{2}$.

Поэтому из неравенства (6.3) получаем

$$\tilde{p}=\int\limits_{\mathscr{D}-F} p\,dv\leqslant 16\,CD^n. \tag{6.4}$$

Если теперь показать, что при достаточно малых D емкость F будет удовлетворять неравенству (5.1), то теорема будет доказана.

Для доказательства построим функцию

$$\tilde{\tilde{\psi}}=\begin{cases} |\psi|-\frac{1}{2}, & \text{если } |\psi|\geqslant\frac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } |\psi|\leqslant\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Функция $\tilde{\tilde{\psi}}$ всюду неотрицательна, а на F равна нулю. Ясно, что

$$\int\limits_{\mathscr{D}}(\operatorname{grad}\tilde{\tilde{\psi}})^2\,dv\leqslant\int\limits_{\mathscr{D}}(\operatorname{grad}\psi)^2\,dv,$$

с другой стороны,

$$\int\limits_{\mathscr{D}}\tilde{\tilde{\psi}}^2\,dv=\int\limits_{|\psi|\geqslant\frac{1}{2}}\psi^2\,dv=\int\limits_{\mathscr{D}}\psi^2\,dv-\int\limits_{|\psi|<\frac{1}{2}}\psi^2\,dv\geqslant D^n-\frac{1}{4}D^n=\frac{3}{4}D^n.$$

Обозначим через $\tilde{\psi}$ функцию, получающуюся из $\tilde{\tilde{\psi}}$ нормированием

$$\int\limits_{\mathscr{D}}\tilde{\psi}^2\,dv=D^n.$$

Из (6.3) и оценки для $\int\tilde{\tilde{\psi}}^2\,dv$ вытекает, что

$$\int\limits_{\mathscr{D}}(\operatorname{grad}\tilde{\psi})^2\,dv\leqslant\frac{4}{3}\,CD^n. \tag{6.5}$$

Напомним, что наша задача состоит в оценке емкости F. В силу результатов § 2 емкость F можно оценить следующим образом. Надо построить функцию, равную единице на F и нулю на некоторой объемлющей F сфере. Интеграл Дирихле такой функции дает оценку сверху для емкости F.

Функция $1-\tilde{\psi}$ равна единице на F и интеграл Дирихле ее достаточно мал, но она определена только на кубе $\mathscr{D}$ и нельзя ручаться, что она равна нулю на границе $\mathscr{D}$.

Поэтому сама функция $\varphi=1-\tilde{\psi}$ непосредственно не может служить для оценки емкости F. Но при помощи φ мы построим функцию, равную нулю вне некоторой сферы. Для этого продолжим φ четным образом за пределы $\mathscr{D}$. Считая, что начало координат в центре $\mathscr{D}$, определим функцию $f(P)$ равенствами

$$f(P)=\begin{cases} 1, & \text{когда} \quad r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\leqslant D; \\ \dfrac{3D-2r}{D}, & \text{когда} \quad D\leqslant r\leqslant \dfrac{3}{2}D; \\ 0, & \text{когда} \quad r\geqslant \dfrac{3}{2}D. \end{cases}$$

Так как эта функция равна 1 всюду на $\mathscr{D}$ и нулю вне сферы радиуса $\frac{3}{2}D$, то произведение $h=f\varphi$ уже может служить для оценки емкости F. Нужно только оценить интеграл Дирихле этого произведения

$$\int(\operatorname{grad} h)^2\,dv\leqslant 2\int[f^2(\operatorname{grad}\varphi)^2+\varphi^2(\operatorname{grad} f)^2]\,dv.$$

Заметив, что $|f|\leqslant 1$, $|\operatorname{grad} f|\leqslant\frac{2}{3D}<\frac{1}{D}$ и что интегрирование распространено не более чем на 3^n кубов, окружающих $\mathscr{D}$, получаем, что

$$C(F)<2\cdot 3^n\left[\int_{\mathscr{D}}(\operatorname{grad}\varphi)^2\,dv+\frac{1}{D^2}\int_{\mathscr{D}}\varphi^2\,dv\right].$$

Применяя теорему 0.5 дополнения ко второму слагаемому в последнем неравенстве (при этом следует учесть, что $\varphi=1-\tilde{\psi}$, а значит φ и $\tilde{\psi}$ имеют одинаковый интеграл Дирихле), получим

$$C(F)<4(n+2)\,3^{n-1}\cdot C\cdot D^n. \tag{6.6}$$

При оценке было использовано неравенство (6.5).

Из полученной оценки для емкости F требуемое утверждение вытекает непосредственно. Действительно, нам нужно было доказать, что существует F с емкостью, удовлетворяющей неравенству (5.1). Но из оценки (6.6) при достаточно малых D справедливость (5.1) получается как следствие того, что оценка (6.6) дает более высокий порядок малости, чем (5.1). Если выбрать D настолько малым, чтобы, кроме (5.1), выполнялось еще неравенство $16CD^n<1$, то теорема, сформулированная в начале этого параграфа, будет полностью доказана.

§ 7. Критерий дискретности и недискретности спектра

Теоремы, доказанные в §§ 5 и 6, позволяют сформулировать критерий дискретности спектра оператора. Этот критерий удобнее всего сформулировать, используя понятие несущественного выреза.

Определение 7.1. Множество F, расположенное в кубе $\mathscr{D}$, называется *несущественным вырезом куба* $\mathscr{D}$, если его емкость удовлетворяет неравенству

$$C(F) \leqslant \frac{D^{n-2}}{(4n)^{4n}},$$

где n—размерность пространства.

Критерий дискретности спектра. *Для того чтобы уравнение*

$$-\Delta\psi + p\psi = \lambda\psi$$

имело дискретный спектр, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathscr{D}-F} p\,dv \to +\infty, \tag{7.1}$$

когда куб $\mathscr{D}$, сохраняя размер, уходит в бесконечность, а вырез F изменяется как угодно, оставаясь несущественным.

Условие (7.1) должно быть выполнено для кубов любого размера. Функция p предполагается ограниченной снизу.

Этот критерий непосредственно следует из теорем, доказанных в §§ 5 и 6.

Практически оказывается очень полезным критерий недискретности спектра. Оба критерия легко получаются один из другого, но критерий недискретности нагляднее и проще.

Критерий недискретности спектра. *Если спектр уравнения*

$$-\Delta\psi + p\psi = \lambda\psi$$

недискретен, то существует последовательность одинаковых непересекающихся кубов $\mathscr{D}_n$ с несущественными вырезами F_n, такая, что

$$\int\limits_{\mathscr{D}_n - F_n} p\,dv < C.$$

Обратно, если существует последовательность кубов со свойством

$$\int\limits_{\mathscr{D}_n} p\,dv < C, \tag{7.2}$$

то спектр уравнения недискретен и останется таким после произвольного изменения функции p на любых несущественных вырезах F_n кубов $\mathscr{D}_n$.

Из этого видно, что роль несущественных вырезов аналогична роли множеств меры нуль в теории меры. Поэтому критерий описательно можно сформулировать так:

С точностью до значений p на несущественных вырезах условие (7.2) *необходимо и достаточно для недискретности спектра.*

§ 8. Спектр неограниченной мембраны

Методы, развитые в предыдущих параграфах, нигде, по существу, не основывались на том факте, что уравнение задано во всем пространстве. Поэтому критерий, сформулированный в § 7, остается справедливым и для уравнений, заданных в некоторой области. Нужно только, чтобы на границе области были заданы самосопряженные граничные условия.

Мы остановимся особо на случае уравнения

$$-\Delta\psi = \lambda\psi \tag{8.1}$$

с граничным условием

$$\psi|_{\Sigma}=0, \tag{8.2}$$

где Σ—граница области G, в которой задано уравнение (8.1). Легко проверить, что самосопряженное граничное условие (8.2) эквивалентно заданию бесконечно большой потенциальной энергии вне области G, в которой потенциальная энергия равна нулю.

Таким образом, уравнение (8.1) с граничным условием (8.2) является предельным случаем уравнения

$$-\Delta\psi+p\psi=\lambda\psi.$$

Поэтому можно было бы доказывать критерий дискретности спектра этого уравнения предельным переходом, устремляя $p\to+\infty$ вне области G.

Непосредственно ясно, что если область G содержит счетное множество непересекающихся кубов одинаковых размеров, то спектр уравнения (8.1) недискретен. Но если дополнительно закрепить мембрану на несущественных вырезах этих кубов, то спектр попрежнему останется недискретным.

Поэтому с точностью до несущественных вырезов недискретный спектр дают те и только те области G, которые содержат счетное число непересекающихся одинаковых кубов.

Более точно сформулируем этот факт в следующей теореме.

Теорема 8.1. *Если уравнение* (8.1), *заданное на области* G, *имеет недискретный спектр, то существует область* $G_1\supset G$, *содержащая счетное число одинаковых непересекающихся кубов, из которой* G *получается выкидыванием несущественных вырезов как угодно малой меры несущественности.*

Наоборот, если область G_1 *содержит указанную последовательность кубов, то после дополнительного закрепления мембраны на любом множестве, являющемся суммой несущественных вырезов этих кубов, спектр уравнения* (8.1) *останется недискретным.*

Из этой общей теоремы можно вывести в частных случаях более простые условия.

Здесь будут сформулированы условия в двух наиболее важных случаях.

Теорема 8.2. *Если уравнение* (8.1) *задано на плоскости и дополнение к области* G *связно, то для недискретности спектра этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы область* G *содержала счетное число непересекающихся одинаковых квадратов.*

Справедливость этой теоремы легко вытекает из общей теоремы и того факта, что на плоскости множества небольшой емкости ограничены кривыми, сумма длин которых невелика. Поэтому такие множества не могут иметь связных компонент значительных линейных размеров.

В пространстве трех и более измерений множества небольшой емкости ограничены *гиперповерхностями* небольшой площади, линейные же размеры связных компонент таких множеств могут быть значительны. Поэтому сформулированная выше теорема специфична для плоскости.

Ниже будет сформулирована теорема, в которой за счет дополнительных требований гладкости границы Σ области G получается простое условие недискретности спектра уравнения (8.1), причем эта теорема справедлива в пространстве любой размерности.

Теорема 8.3. *Если граница* Σ *области* G, *в которой задано уравнение* (8.1), *имеет ограниченную кривизну, то для недискретности спектра* *этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы область G содержала счетное число непересекающихся кубов одинаковых размеров.*

На доказательстве этой последней теоремы остановимся несколько более подробно. Достаточность условия очевидна. Докажем необходимость. Пусть уравнение (8.1) имеет недискретный спектр и пусть k—максимальная кривизна, которую может иметь граница Σ. По общей теореме можно к области G добавить множество F с мерой несущественности сколь угодно малой, так что расширенная область будет содержать счетное число непересекающихся одинаковых кубов. Без ограничения общности можно считать, что кубы $\tilde{\mathscr{D}}_n$ имеют ребро длины меньше $1/k$.

Поместим в центре $\tilde{\mathscr{D}}_n$ куб $\mathscr{D}_n$ с ребром в три раза меньшим чем у $\tilde{\mathscr{D}}_n$. Утверждается, что существует бесконечное множество кубов $\mathscr{D}_n$, целиком принадлежащих области G.

Допустим, что все $\mathscr{D}_n$, кроме конечного числа, имеют общие точки с дополнением к G. Тогда $\tilde{\mathscr{D}}_n$ обязательно имеют общие точки с Σ.

Рассмотрим пересечение $\tilde{\mathscr{D}}_n$ с Σ. Так как кривизна Σ не больше k, то кусок Σ_n поверхности Σ, лежащий внутри $\tilde{\mathscr{D}}_n$, имеет площадь (в n-мерном случае—гиперплощадь), не меньшую, чем площадь грани $\tilde{\mathscr{D}}_n$. Следовательно, емкость Σ_n больше некоторой, вполне определенной заданием k, доли емкости всего $\tilde{\mathscr{D}}_n$.

Это противоречит тому, что мы могли выбрать множество F со сколь угодно малой мерой несущественности.

Таким образом теорема доказана.

Совершенно аналогично проводится доказательство сформулированной выше теоремы для плоской мембраны.

§ 9. Уравнения в конечных разностях

Целью настоящего параграфа является изучение разностного аналога уравнения в частных производных и установление критерия дискретности спектра соответствующего оператора.

Вообще говоря, теория разностных уравнений обычно оказывается более сложной, чем теория дифференциальных уравнений. Тем более интересно, что в данном случае результат для уравнений в конечных разностях оказывается проще, чем для дифференциальных уравнений.

Для того чтобы не загромождать изложение множеством индексов, исследование будет проведено для двумерного случая. Переход к общему случаю не вносит ни в изложение, ни в результат ничего нового.

Итак, рассматривается оператор в гильбертовом пространстве последовательностей с двумя индексами

$$L\psi_{i,k} = -[(\psi_{i+1,\,k} - 2\psi_{i,\,k} + \psi_{i-1,\,k}) + (\psi_{i,\,k+1} - 2\psi_{i,\,k} + \psi_{i,\,k-1})] + p_{i,\,k}\psi_{i,\,k}. \quad (9.1)$$

Мы предполагаем, что коэффициенты $p_{i,\,k}$ ограничены снизу, причем для удобства можно считать даже, что $p_{i,\,k} \geqslant 1$.

Тогда из общего критерия дискретности спектра полуограниченного оператора заключаем, что дискретность спектра оператора L эквивалентна компактности семейства последовательностей, для которых

$$\sum_{i,\,k} \psi_{i,\,k} L\psi_{i,\,k} \leqslant 1. \quad (9.2)$$

Легко видеть, что неравенство (9.2) равносильно неравенству

$$\sum_{i,k}[(\psi_{i+1,k}-\psi_{i,k})^2+(\psi_{i,k+1}-\psi_{i,k})^2+p_{i,k}\psi_{i,k}^2]\leqslant 1. \tag{9.3}$$

Покажем теперь, что справедлив следующий *критерий дискретности спектра разностного оператора.*

Теорема 9.1. *Для того чтобы оператор L имел дискретный спектр, необходимо и достаточно, чтобы*

$$p_{i,k}\to+\infty, \text{ когда } |i|+|k|\to\infty.$$

Доказательство. Пусть существует последовательность номеров i_n, k_n, для которой $p_{i_n,k_n}<C$. Построим счетное число функций

$$\psi_{i,k}^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{4+C}}, & \text{когда } i=i_n,\ k=k_n;\\ 0, & \text{когда } (i,\ k)\neq(i_n,\ k_n).\end{cases}$$

Непосредственной подстановкой убедимся, что все $\psi_{i,k}^{(n)}$ удовлетворяют неравенству (9.2). Но так как все они попарно ортогональны и имеют одинаковую норму, то они образуют некомпактную последовательность. Следовательно, по общему критерию, условие (9.3) необходимо для дискретности спектра оператора L.

Пусть теперь $p_{i,k}\to\infty$. Тогда из неравенства (9.2) следует, что

$$1\geqslant\sum_{|i|+|k|>n}p_{i,k}\psi_{i,k}^2\geqslant\min_{|i|+|k|>n}p_{i,k}\cdot\sum_{|i|+|k|>n}\psi_{i,k}^2.$$

Следовательно, для любого ε найдется такое n, что для любой функции $\psi_{i,k}$, удовлетворяющей (9.2), будет выполнено неравенство

$$\sum_{|i|+|k|>n}\psi_{i,k}^2<\varepsilon.$$

По теореме 0.3 дополнения заключаем, что семейство функций, определяемое неравенством (9.2) компактно, а, значит, спектр оператора L дискретен. Теорема доказана полностью.

Дополнение

1. Теорема 0.1. *Дано множество функций (вообще говоря, комплекснозначных), равных нулю вне сферы радиуса R.*

Если для всех функций этого семейства

$$\int[|\nabla\psi|^2+|\psi|^2]\,dv\leqslant C^2, \tag{0.1}$$

то это семейство компактно в смысле сходимости в среднем.

Доказательство. Для простоты будем считать, что пространство, в котором заданы функции, двумерно. Обобщение не составляет труда.

Рассмотрим квадрат, объемлющий наш круг радиуса R. Функции

$$\varphi_{m,n}=\frac{1}{4L^2}e^{i\frac{\pi}{L}(mx+ny)}$$

($2L$ — сторона квадрата) образуют полную ортонормированную систему на этом квадрате.

Обозначим через $\psi_{m,n}$ коэффициенты разложения функции ψ по функциям $\varphi_{m,n}$.

Из тождества

$$\nabla\psi\nabla f = \nabla(\psi\nabla f) - \psi\nabla^2 f,$$

подставляя $\varphi_{-m,-n}$ вместо f и интегрируя по квадрату $\mathscr{L}$, легко получаем

$$(m^2+n^2)\psi_{m,n} = -\int\limits_{\mathscr{L}} \left(m\frac{\partial\psi}{\partial x} + n\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\varphi_{-m,-n}\,dv.$$

Отсюда и из неравенства (0.1) получаем, что

$$\sum_{m^2+n^2>k^2} |\psi_{m,n}|^2 \leqslant \frac{C^2}{k^2}. \tag{0.2}$$

Неравенство (0.2) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое конечномерное пространство $\left(\text{а именно пространство линейных комбинаций тех } \varphi_{m,n}, \text{ для которых } m^2+n^2 \leqslant \frac{C^2}{\varepsilon}\right)$, что все функции семейства (0.1) отстоят не более чем на $\sqrt{\varepsilon}$ от сферы радиуса C этого пространства. Так как ε произвольно, то утверждение теоремы 1 доказано.

Докажем теперь более общее утверждение.

Теорема 0.2. *Пусть семейство комплекснозначных функций таково, что*

$$\int (|\nabla\psi|^2 + |\psi|^2)\,dv \leqslant 1 \tag{0.3}$$

и, кроме того, для всякого ε найдется R такое, что

$$\int\limits_{x^2+y^2>R^2} |\psi|^2\,dv < \varepsilon^2 \tag{0.4}$$

для любой функции ψ семейства.

Тогда это семейство компактно в смысле сходимости в среднем.

Доказательство проведем, опираясь на доказанную теорему 0.1. А именно, будет показано, что для всякого ε можно указать семейство, обладающее свойствами, сформулированными в теореме 0.1, и такое, что все функции нашего семейства отстоят не более чем на ε от семейства, фигурирующего в теореме 0.1. Из этого на основании общих теорем о компактности следует компактность нашего семейства.

Рассмотрим функцию

$$\chi_R(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant r \leqslant R-1, \\ R - r - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi(R-r), & R-1 \leqslant r \leqslant R, \\ 0, & r \geqslant R. \end{cases}$$

Эта функция в кольце $R-1 \leqslant r \leqslant R$ убывает от единицы на внутренней границе кольца до нуля — на внешней. При этом ее первые и вторые производные остаются непрерывными на границе кольца.

Умножим теперь все функции нашего семейства на $\chi_R(r)$. Получится семейство функций, равных нулю вне круга радиуса R. Будем обозначать через f функции этого нового семейства, так что

$$f=\chi_R\cdot\psi.$$

Так как

$$|\chi_R|\leqslant 1 \text{ и } |\nabla\chi_R|\leqslant 2,$$

то

$$|\nabla f|^2+|f|^2\leqslant|\chi_R\nabla\psi+\psi\nabla\chi_R|^2+|\psi|^2\leqslant 9(|\nabla\psi|^2+|\psi|^2).$$

Следовательно,

$$\int(|\nabla f|^2+|f|^2)\,dv\leqslant 9.$$

В силу теоремы 0.1 семейство функций f компактно.

Но отклонение f от ψ равно $\int|f-\psi|^2\,dv$,

$$\int|f-\psi|^2\,dv\leqslant\int\limits_{x^2+y^2\geqslant(R-1)^2}|\psi|^2\,dv$$

и в силу (0.4) это отклонение может быть сделано сколь угодно малым выбором достаточно большого R. Значит, и семейство функций ψ компактно.

Теорема 0.2 тем самым доказана.

Теорема 0.3. *Рассмотрим семейство последовательностей с двумя индексами* $\psi_{i,k}$, *определяемое неравенством*

$$\sum_{i,k}\left[(\psi_{i+1,k}-\psi_{i,k})^2+(\psi_{i,k+1}-\psi_{i,k})^2+\psi_{i,k}^2\right]\leqslant 1,$$

причем известно, что для всякого ε *существует такое* N, *что*

$$\sum_{i^2+k^2>N^2}\psi_{i,k}^2<\varepsilon^2.$$

Тогда это семейство компактно.

Доказательство этой теоремы, на котором мы не останавливаемся, можно провести совершенно аналогично доказательству теоремы 0.2.

2. Теорема 0.4. *Пусть* ψ — *функция, заданная на кубе* $\mathcal{D}$, *а* $\mathcal{D}_h$ — *куб, получающийся из* $\mathcal{D}$ *сжатием в* $1/h$ *раз. Тогда*

$$\sqrt{\int\limits_{\mathcal{D}}\psi^2\,dv}\leqslant h^{-\frac{n}{2}}\sqrt{\int\limits_{\mathcal{D}_h}\psi^2\,dv}+D\int\limits_h^1 h^{-\frac{n}{2}}\,dh\sqrt{\int\limits_{\mathcal{D}}|\nabla\psi|^2\,dv}. \qquad (0.5)$$

Здесь D — длина ребра куба $\mathcal{D}$, а n — размерность пространства.

Для доказательства введем функцию

$$f(h)=\int\limits_{\mathcal{D}}\psi^2(h\xi_1,\ \ldots,\ h\xi_n)\,d\xi_1\ \ldots\ d\xi_n.$$

Ясно, что

$$h^n f(h)=\int\limits_{\mathcal{D}_h}\psi^2\,dv.$$

Оценим $\frac{df}{dh}$

$$\frac{df}{dh}=\int\limits_{\mathscr{D}} 2\psi_h\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\xi_1+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\xi_n\right)_h d\xi_1\ \ldots\ d\xi_n.$$

Значок h у скобки и при функции ψ означает, что вместо аргумента x_i надо подставить $h\xi_i$.

Дважды применяя неравенство Буняковского, получим

$$\left|\frac{df}{dh}\right|^2\leqslant 4\int\limits_{\mathscr{D}}\psi^2(h\xi_1,\ \ldots,\ h\xi_n)\,d\xi_1\ \ldots\ d\xi_n\times$$

$$\times\int\limits_{\mathscr{D}}(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2)\,[(\nabla\psi)(h\xi_1,\ \ldots,\ h\xi_n)]^2\,d\xi_1\ \ldots\ d\xi_n.$$

Так как

$$\max_{\mathscr{D}}(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2)\leqslant D^2,$$

а

$$\int\limits_{\mathscr{D}}|(\nabla\psi)(h\xi_1,\ \ldots,\ h\xi_n)|^2\,d\xi_1\ \ldots\ d\xi_n\leqslant h^{-n}\int\limits_{\mathscr{D}}|\,\Delta\psi\,|^2\,dv,$$

то окончательно получаем

$$\left|\frac{df}{dh}\right|^2\leqslant 4fh^{-n}\cdot\int\limits_{\mathscr{D}}|\,\nabla\psi\,|^2\,dv\cdot D^2.$$

Запишем это неравенство иначе:

$$\left|\frac{d\sqrt{f}}{dh}\right|\leqslant Dh^{-\frac{n}{2}}\sqrt{\int\limits_{\mathscr{D}}|\,\nabla\psi\,|^2\,dv}.$$

Но так как

$$\sqrt{f(1)}-\sqrt{f(h)}=\int\limits_h^1\frac{d\sqrt{f}}{dh}\,dh,$$

то

$$\left|\sqrt{f(1)}-\sqrt{f(h)}\right|\leqslant D\int\limits_h^1 h^{-\frac{n}{2}}\,dh\cdot\sqrt{\int\limits_{\mathscr{D}}|\,\nabla\psi\,|^2\,dv}.$$

Из этого последнего неравенства непосредственно следует утверждение теоремы 0.4.

3. Рассмотрим на кубе $\mathscr{D}$ уравнение

$$-\Delta\psi+p\psi=\lambda\psi,\qquad p\geqslant 0 \tag{0.6}$$

и обозначим через $\lambda(\mathscr{D})$ наименьшее собственное значение при нулевых граничных условиях.

Через $\mu(\mathscr{D})$ обозначим наименьшее собственное значение при граничных условиях

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0.$$

Как известно, эти два числа суть решения следующих вариационных задач:

$$\lambda(\mathscr{D}) = \min \int_{\mathscr{D}} [\,|\nabla\psi|^2 + p\psi^2]\,dv, \tag{0.7}$$

причем минимум берется по всем исчезающим на границе функциям, для которых

$$\int_{\mathscr{D}} \psi^2\,dv = 1. \tag{0.8}$$

$\mu(\mathscr{D})$ определяется аналогичным образом:

$$\mu(\mathscr{D}) = \min \int_{\mathscr{D}} [\,|\nabla\psi|^2 + p\psi^2]\,dv,$$

но минимум берется уже по всем вообще функциям, удовлетворяющим условию (0.8).

Мы докажем, что эти два числа связаны следующими неравенствами:

$$\mu(\mathscr{D}) \leqslant \lambda(\mathscr{D}) \leqslant 2^{2n+7}\left[\mu(\mathscr{D}) + \frac{1}{D^2}\right]. \tag{0.9}$$

Доказательству подлежит, конечно, только вторая часть неравенства (0.9), так как первая часть вытекает непосредственно из определения $\lambda(\mathscr{D})$ и $\mu(\mathscr{D})$.

Доказательство неравенства (0.9). По определению $\mu(\mathscr{D})$ найдется такая функция ψ, что

$$\int_{\mathscr{D}} \psi^2\,dv = 1$$

и

$$\mu(\mathscr{D}) \leqslant \int_{\mathscr{D}} [\,|\nabla\psi|^2 + p\psi^2]\,dv < \mu(\mathscr{D}) + \varepsilon, \tag{0.10}$$

причем такая функция существует для любого $\varepsilon > 0$.

Обратимся теперь к неравенству (0.5), которое справедливо для любой функции ψ, и выберем h настолько близким к 1, чтобы

$$D\int_h^1 h^{-\frac{n}{2}}\,dh \cdot \sqrt{\int_{\mathscr{D}} |\nabla\psi|^2\,dv} < \frac{1}{2}. \tag{0.11}$$

Для этого достаточно положить

$$h = \max\left(\frac{1}{2},\ 1 - \frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}} \cdot D \cdot \sqrt{\mu(\mathscr{D}) + \varepsilon}}\right). \tag{0.12}$$

Если h выбрано таким образом, то из неравенства (0.5) следует, что

$$\int_{\mathscr{D}_h} \psi^2\,dv \geqslant \frac{1}{2^{n+2}}. \tag{0.13}$$

Построим в $\mathscr{D}$ функцию χ, которая равна 1 на $\mathscr{D}_h$ и равна нулю на границе $\mathscr{D}$.

Ясно, что можно построить эту функцию таким образом, чтобы было выполнено неравенство

$$|\nabla\chi| < \frac{2}{D(1-h)}\,. \tag{0.14}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi = \psi\cdot\chi.$$

Так как φ равна нулю на границе $\mathscr{D}$, то при ее помощи можно оценить $\lambda(\mathscr{D})$

$$\lambda(\mathscr{D}) \leqslant \frac{\int\limits_{\mathscr{D}} [|\nabla\varphi|^2 + p\varphi^2]\,dv}{\int\limits_{\mathscr{D}} \varphi^2\,dv}\,. \tag{0.15}$$

Оценим отдельно числитель и знаменатель этой дроби. Оценка знаменателя следует непосредственно из неравенства (0.8) и того, что $|\chi| \leqslant 1$

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \varphi^2\,dv \geqslant \int\limits_{\mathscr{D}_h} \psi^2\,dv \geqslant \frac{1}{2^{n+2}}\,. \tag{0.16}$$

Числитель оценивается несколько сложнее:

$$|\nabla\varphi|^2 + p\varphi^2 = (\chi\nabla\psi + \psi\nabla\chi)^2 + p\chi^2\psi^2 \leqslant$$
$$\leqslant |\nabla\psi|^2 + 2|\chi\psi\nabla\chi\nabla\psi| + \psi^2|\nabla\chi|^2 + p\psi^2 \leqslant 2[|\nabla\psi|^2 + p\psi^2 + \psi^2|\nabla\chi|^2]$$

Поэтому на основании (0.10) и (0.14) получим

$$\int\limits_{\mathscr{D}} [|\nabla\varphi|^2 + p\varphi^2]\,dv \leqslant 2\int\limits_{\mathscr{D}} [|\nabla\psi|^2 + p\psi^2]\,dv + 2\int\limits_{\mathscr{D}} |\nabla\chi|^2\psi^2\,dv \leqslant$$
$$\leqslant 2\left[\mu(\mathscr{D}) + \varepsilon + \frac{4}{D^2(1-h)^2}\right]. \tag{0.17}$$

Из (0.12) следует, что

$$\frac{1}{(1-h)^2} < 4 + D^2 2^{n+2}[\mu(\mathscr{D}) + \varepsilon]. \tag{0.18}$$

Из неравенств (0.15), (0.16), (0.17) и (0.18) имеем окончательно

$$\lambda(\mathscr{D}) \leqslant 2^{2n+7}\left[\mu(\mathscr{D}) + \varepsilon + \frac{1}{D^2}\right].$$

Но так как ε произвольно, то неравенство (0.9) доказано.

4. Теорема 0.5. *Пусть ψ — функция, заданная на кубе $\mathscr{D}$, а $\bar\psi$ — ее среднее значение*

$$\bar\psi = \frac{1}{D^n}\int\limits_{\mathscr{D}} \psi\,dv.$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathscr{D}} (\psi - \bar\psi)^2\,dv \leqslant \frac{n}{2}D^2\int\limits_{\mathscr{D}} |\nabla\psi|^2\,dv, \tag{0.19}$$

где D — длина ребра куба $\mathscr{D}$, а n — размерность пространства.

Доказательство. Прежде всего легко проверить, что

$$\int\limits_{\mathscr{D}} (\psi - \overline{\psi})^2\, dv = \frac{1}{2D^n} \int\limits_{\mathscr{D}} \int\limits_{\mathscr{D}} [\psi(P) - \psi(Q)]^2\, dP\, dQ. \tag{0.20}$$

Разность $\psi(P) - \psi(Q)$ запишем в виде криволинейного интеграла от градиента ψ. Пусть координаты точки P суть $x_1, \ldots, x_n$, а координаты точки Q обозначены через $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Тогда

$$\psi(P) - \psi(Q) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\xi_i}^{x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda_i, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n)\, d\lambda_i.$$

Из неравенства

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

получаем

$$[\psi(P) - \psi(Q)]^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} \Big(\int\limits_{\xi_i}^{x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, d\lambda_i \Big)^2.$$

Применим к каждому из интегралов в правой части неравенство Буняковского и учтем, что так как и P и Q принадлежат $\mathscr{D}$, то $|\xi_i - x_i| \leqslant D$. Получим

$$[\psi(P) - \psi(Q)]^2 \leqslant nD \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{0}^{D} \Big(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \Big)^2 d\lambda_i.$$

Интегрируя по $\xi_1, \ldots, \xi_n, x_1, \ldots, x_n$ неравенство для $[\psi(P) - \psi(Q)]^2$, получаем

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \int\limits_{\mathscr{D}} [\psi(P) - \psi(Q)]^2\, dP\, dQ \leqslant$$

$$\leqslant nD \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{0}^{D} \ldots \int\limits_{0}^{D} \Big(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \Big)^2 (x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda_i, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n)\, dx_1 \ldots$$

$$\ldots dx_{i-1}\, d\lambda_i\, d\xi_{i+1} \ldots d\xi_i \int\limits_{0}^{D} \ldots \int\limits_{0}^{D} d\xi_1 \ldots d\xi_i\, dx_i \ldots dx_n,$$

т. е.

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \int\limits_{\mathscr{D}} [\psi(P) - \psi(Q)]^2\, dv \leqslant nD^{n+2} \int\limits_{\mathscr{D}} |\nabla \psi|^2\, dv. \tag{0.21}$$

Отсюда на основании равенства (0.20) мы получаем доказательство неравенства (0.19).

5. Теорема 0.6. *Пусть $U(P)$ — потенциал, задаваемый распределением m,*

$$U(P) = \int\limits_{F} \frac{dm(Q)}{(PQ)^{n-2}}. \tag{0.22}$$

Пусть, далее, Σ — поверхность, содержащая множество F внутри и не имеющая с F ни одной общей точки.

Тогда справедлива формула

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma = -(n-2)\,\omega_n \int_{F} dm(Q), \tag{0.23}$$

где n — размерность пространства, ω_n — поверхность единичной сферы и $\frac{\partial}{\partial n}$ — дифференцирование по внешней по отношению к Σ нормали.

Доказательство. В интеграл

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma$$

подставим выражение для $\frac{\partial U}{\partial n}$, вытекающее из (0.22):

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \int_{F} \operatorname{grad}_P \frac{1}{(PQ)^{n-2}}\, dm(Q).$$

После подстановки имеем

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma = \int_{\Sigma}\int_{F} \operatorname{grad}_P \frac{1}{(PQ)^{n-2}}\, dm(Q)\, d\sigma(P).$$

Так как области интегрирования по P и Q не зависят друг от друга, а подинтегральная функция не имеет никаких особенностей (ибо P не равно Q нигде в области интегрирования), мы вправе переменить порядок интегрирования:

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma = \int_{F} \left(\int_{\Sigma} \operatorname{grad}_P \frac{1}{(PQ)^{n-2}}\, d\sigma(P)\right) dm(Q). \tag{0.24}$$

Но теперь внутренний интеграл не зависит от поверхности Σ, важно лишь, чтобы она содержала точку Q. Возьмем в качестве поверхности единичную сферу, описанную вокруг точки Q. Тогда легко видеть, что

$$\int_{\Sigma} \operatorname{grad}_P \frac{1}{(PQ)^{n-2}}\, d\sigma(P) = -(n-2)\,\omega_n.$$

Подставив найденное значение в выражение (0.24), мы получим искомое равенство (0.23).

Так как U гармонична вне F, то используя соотношение

$$\operatorname{div}(U \operatorname{grad} U) = (\operatorname{grad} U)^2 + U\Delta U = (\operatorname{grad} U)^2,$$

получим, учитывая, что $U = 1$ на F

$$\int_{R_n - F} (\operatorname{grad} U)^2\, dv = -\int_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma, \tag{0.25}$$

где Γ означает границу F. Объединяя (0.23) и (0.25), получаем важное соотношение

$$\int_{R_n - F} (\operatorname{grad} U)^2\, dv = (n-2)\,\omega_n \int_{F} dm(Q). \tag{0.26}$$

Поступило
19.II.1952

Литература

1. Friedrichs K., Criteria for the discrete character of the spectra of ordinary differential operators, Stud. a. Essays present. to R. Courant, N. Y.,1948, 145—160.

2. Rellich F., Das Eigenwertproblem von $\Delta u + \lambda u = 0$ in Halbröhren, Stud. a. Essays present. to. R. Courant, N. Y., 1948, 329—344.

3. Глазман И. М., О спектре линейных дифференциальных операторов, ДАН СССР 80, № 2 (1951), 153—156.

4. Rellich F., Störungstheorie der Spectralzerlegung, Math. Ann. **118**, 4 (1942), 462—484.

5. Carleman T., Sur la theorie mathematique de l'équation de Schroedinger. Ark. för Mat., Astr., Fys., **24B**, 11 (1934), 1—7.

6. Келдыш М. В., О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, Успехи матем. наук, вып. VIII (1940), 171—231.

7. Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

8. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. II, М.—Л., Гостехиздат, 1951.